ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

INTRODUCTION

OBJECTIF.

Ce problème étudie une modélisation de l'identification d'un corps convexe compact non vide par les rayons X.

Soient K un convexe compact non vide de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$, et δ une direction de droite. On note $\Phi_{\delta,K}$ l'application qui à toute droite Δ de $\mathbb{R}^2$ de direction δ associe la longueur du segment $K \cap \Delta$ (et 0 si $K \cap \Delta = \varnothing$).

Alors, une famille de quatre directions $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ « bien choisies » est nécessaire et suffisante pour « distinguer » deux convexes compacts K et K', c'est-à-dire pour avoir :

$$\left[\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \qquad \Phi_{\delta_j, K} = \Phi_{\delta_j, K'}\right] \Rightarrow K = K'.$$

On se propose d'étudier ce résultat pour les polygones convexes.

RAPPELS.

a. Les parties convexes non vides d'une droite sont les intervalles portés par cette droite. Tout demi-plan, ouvert ou fermé, est convexe.

b. Soient un repère $\mathscr{R}$ et une droite $\mathscr{D}$ du plan affine $\mathbb{R}^2$. Soit l'expression $D(x, y) = ux + vy + w$ telle que $D(x, y) = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ relativement à $\mathscr{R}$.

Alors $\mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{D}$ est la réunion de deux demi-plans ouverts de frontière $\mathscr{D}$ qui peuvent être définis relativement à $\mathscr{R}$ respectivement par $\Omega = \{M(x, y),\ D(x, y) > 0\}$ et $\Omega' = \{M(x, y),\ D(x, y) < 0\}$. De plus, pour tout $(M, N) \in \Omega \times \Omega'$, la droite (MN) coupe $\mathscr{D}$ en un seul point. Ce point est situé sur $]M, N[$.

NOTATIONS.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine euclidienne canonique.

Soient p un entier tel que $p \geqslant 3$, et des points $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $\mathbb{R}^2$. On dira que le système $\mathscr{S} = (A_1, A_2, \ldots, A_p)$ définit un polygone convexe lorsque, en posant $A_{p+1} = A_1$, on a la propriété suivante :

« Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, les points A_k et A_{k+1} définissent une droite qui est la frontière d'un demi-plan fermé F_k dont l'intérieur contient tous les autres points A_j. »

Quand il en est ainsi, le polygone convexe défini par $\mathscr{S}$ est $\bigcap_{k=1}^{p} F_k$, et on le note $\mathscr{P}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$, $A_1, \ldots, A_p$ sont les sommets de $\mathscr{P}$.

Pour tout réel θ, on note $\delta(\theta)$ la droite vectorielle (ou direction) engendrée par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. Étant donné $m \in \mathbb{N}^*$, on dira que les directions $d_1, \ldots, d_m$ forment une *famille régulière* s'il existe un automorphisme f du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\{d_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m\} = \left\{f\left[\delta\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right],\ 0 \leqslant k \leqslant m-1\right\}.$$

PARTIE A

Le but de cette partie est d'établir des résultats exploités dans la partie C.

I. AUTOMORPHISMES DU $\mathbb{R}$-ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^2$ ÉCRITS SOUS FORME COMPLEXE

On identifie (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et le complexe $z = x + iy$.

1. Soit (A, B) un couple de $\mathbb{C}^2$. On considère $f : z \longmapsto Az + B\bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

   a. Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

   b. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $|A| \neq |B|$.

2. On considère le cas particulier $(A, B) = (0, e^{i\theta})$ où θ est un réel fixé.

   Montrer que f est une symétrie. En préciser l'axe et la direction.

II. EXEMPLES DE FAMILLES RÉGULIÈRES

Soient trois directions d_1, d_2, d_3 prises dans $\mathbb{R}^2$ et deux à deux distinctes.

1. *a.* Montrer que tout couple de $d_1 \times d_2$ formé de vecteurs non nuls est un système libre.

   b. Montrer que les familles $\{d_1\}$ et $\{d_1, d_2\}$ sont régulières.

2. *a.* Montrer que pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$, on peut trouver un vecteur $\vec{v}_k$ directeur de d_k de sorte que l'on ait $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_2$.

   b. Vérifier que $1 + \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$. En déduire que $\{d_1, d_2, d_3\}$ est une famille régulière.

III. BIRAPPORT DE QUATRE DIRECTIONS

Étant donné des vecteurs $\vec{V}_j = (x_j, y_j)$ où $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ supposés deux à deux indépendants, on pose $\beta_{jk} = x_j y_k - x_k y_j$ pour tout couple (j, k).

1. Montrer que le réel $\dfrac{\beta_{13}\,\beta_{24}}{\beta_{14}\,\beta_{23}}$ existe. On le note $b(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)$.

2. Soient des directions d_1, d_2, d_3, d_4 deux à deux distinctes.

   a. Montrer que le réel $b(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ ne dépend pas du choix du vecteur non nul $\vec{v}_k$ sur d_k. On pose alors $\mathscr{B}(d_1, d_2, d_3, d_4) = b(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.

   b. Soit f un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

   Démontrer que $\mathscr{B}(f(d_1), f(d_2), f(d_3), f(d_4)) = \mathscr{B}(d_1, d_2, d_3, d_4)$.

IV. EXISTENCE DE FAMILLES NON RÉGULIÈRES

1. Soient un entier $m \geqslant 4$ et une famille régulière de m directions. On extrait de cette famille quatre directions d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 deux à deux distinctes.

   a. Montrer que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe au moins un polynôme $\mathscr{T}_k$ de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant $\cos k\theta = \mathscr{T}_k(\cos\theta)$ pour tout réel θ.

   b. En déduire l'existence d'une fraction $\mathscr{A} \in \mathbb{Q}(X)$ telle que $\mathscr{B}(d'_1, d'_2, d'_3, d'_4) = \mathscr{A}\left(\cos\dfrac{\pi}{m}\right)$.

2. On admet que certains réels (par exemple e et π) ne sont pas de la forme $\mathscr{A}\left(\cos\dfrac{\pi}{m}\right)$ avec $\mathscr{A} \in \mathbb{Q}(X)$. Démontrer alors qu'il existe au moins une famille de quatre directions distinctes qui ne soit pas régulière.

V. ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME T DE $\mathbb{C}^p$

On considère un entier $p \geqslant 3$. On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p}\right)$. Soient T et σ les deux endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ définis respectivement par les égalités :

$$T(z_1, \ldots, z_p) = \left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}, \ldots, \frac{z_p + z_1}{2}\right) \qquad \sigma(z_1, \ldots, z_p) = (z_2, z_3, \ldots, z_p, z_1).$$

On note $\mathscr{H}$ l'hyperplan de $\mathbb{C}^p$ défini par $z_1 + z_2 + \ldots + z_p = 0$.

Pour chaque k de $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ on pose $H_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(p-1)k})$.

1. Calculer σ^p. En déduire que σ est diagonalisable. Retrouver ce résultat en calculant $\sigma(H_k)$.

2. Établir que T est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.

3. *a.* Démontrer que $(H_1, \ldots, H_{p-1})$ est une base de l'hyperplan $\mathscr{H}$.

   b. Soit $h = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un vecteur fixé de l'hyperplan $\mathscr{H}$. On pose $h = \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k H_k$.

   Établir les égalités : $\alpha_1 = \dfrac{1}{p}\sum_{q=1}^{p} \omega^{1-q} a_q$ et $\alpha_{p-1} = \dfrac{1}{p}\sum_{q=1}^{p} \omega^{q-1} a_q$.

PARTIE B

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des polygones convexes définis dans l'introduction. On pourra admettre que les systèmes $(A_1, \ldots, A_p)$, $(A_p, A_{p-1}, \ldots, A_2, A_1)$ et $(A_2, A_3, \ldots, A_p, A_1)$ définissent (ou non) simultanément le même polygone convexe, et que trois points non alignés définissent un polygone convexe (appelé triangle).

On considère un polygone $\mathscr{P}(A_1, \ldots, A_p) = \mathscr{P}$ fixé. On pose encore $A_{p+1} = A_1$.

I. DÉCOMPOSITION EN TRIANGLES ET CONVEXITÉ DE $\mathscr{P}$

1. Montrer que les points $A_1, \ldots, A_p$ sont deux à deux distincts et trois à trois non alignés.

2. Démontrer que $\mathscr{P}$ est un ensemble convexe.

3. On suppose que $p \geqslant 4$, et pour chaque $k \in \{2, \ldots, p-1\}$ on pose $\mathscr{P}_k = \mathscr{P}(A_1, A_k, A_{k+1})$.
   a. Démontrer que $\mathscr{P}_k$ est l'ensemble des barycentres de A_1, A_k, A_{k+1} affectés de masses positives ou nulles. (On pourra considérer le repère $(A_1, \overrightarrow{A_1 A_k}, \overrightarrow{A_1 A_{k+1}})$).
   b. En déduire que $\mathscr{P}_k \subset \mathscr{P}$.

4. On reprend les notations du 3. et on fixe $k \in \{3, \ldots, p-1\}$.
   a. Établir que l'intersection de la droite $(A_1 A_k)$ et de $F_1 \cap F_k$ est le segment $[A_1, A_k]$.
   b. Démontrer que l'un des demi-plans ouverts de frontière $(A_1 A_k)$ contient A_{k-1} et que l'autre contient A_{k+1}.
   c. Établir que les points A_q tels que $k+1 \leqslant q \leqslant p$ sont dans un même demi-plan ouvert de frontière $(A_1 A_k)$. En déduire que le système $(A_1, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_p)$ définit un polygone convexe. Montrer qu'il en est de même pour le système $(A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k)$.

5. Démontrer que pour tout $p \geqslant 4$ on a $\mathscr{P} = \bigcup_{k=2}^{p-1} \mathscr{P}_k$.

II. $\mathscr{P}$ EST UNE PARTIE COMPACTE DE $\mathbb{R}^2$

1. Prouver que $\mathscr{P}(A_1, A_2, A_3)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $\mathscr{P}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que pour toute droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}$ est soit vide, soit un segment (d'extrémités distinctes ou non).

III. TRANSFORMATION DE POLYGONES CONVEXES

1. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, p\}$ on note M_k le milieu du segment $[A_k, A_{k+1}]$.
   Démontrer que le système $(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ définit un polygone convexe. (On pourra utiliser **B.I.**).

2. Soit φ une bijection affine de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Établir que le système $(\varphi(A_1), \varphi(A_2), \ldots, \varphi(A_p))$ définit un polygone convexe et que l'on a $\varphi(\mathscr{P}) = \mathscr{P}(\varphi(A_1), \varphi(A_2), \ldots, \varphi(A_p))$.

IV. NOTION DE $\mathcal{F}$- POLYGONE

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble non vide de directions de $\mathbb{R}^2$. On dira que $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{F}$-polygone si et seulement si, pour tout δ de $\mathcal{F}$ et tout k de $\{1, 2, \ldots, p\}$, la droite Δ_k de direction δ et passant par A_k contient l'un des A_j avec $j \neq k$ ou bien vérifie $\Delta_k \cap \mathcal{P} = \{A_k\}$. On suppose, dans cette question, que $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{F}$-polygone.

1. Soit δ une direction fixée, élément de $\mathcal{F}$.
   a. On suppose que $\Delta_2 \cap \mathcal{P} = \{A_2\}$. Montrer que la droite $(A_1 A_3)$ a pour direction δ.
   b. En déduire qu'il existe au moins un indice k_0 tel que Δ_{k_0} contienne un point $A_j \neq A_{k_0}$.
   c. On suppose qu'il existe j et k dans $\{3, \ldots, p\}$ tels que A_k appartienne à Δ_1 et A_j appartienne à Δ_2. Prouver que $k = j + 1$.

2. Reprenant les notations du **B.III.**, établir que $\mathcal{P}(M_1, \ldots, M_p)$ est un $\mathcal{F}$-polygone.

V. POLYGONES CONVEXES $\mathcal{F}$- ÉQUIVALENTS

Soit $\mathcal{P}'$ un polygone convexe et δ une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits équivalents suivant δ si et seulement si $\Phi_{\delta,\mathcal{P}} = \Phi_{\delta,\mathcal{P}'}$ (voir introduction).

$\mathcal{F}$ désignant un ensemble non vide de directions, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits $\mathcal{F}$-équivalents quand ils sont équivalents suivant chaque δ de $\mathcal{F}$.

Soit φ une bijection affine de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et f l'application linéaire associée à φ.

Démontrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont équivalents suivant δ si et seulement si $\varphi(\mathcal{P})$ et $\varphi(\mathcal{P}')$ sont équivalents suivant $f(\delta)$.

PARTIE C

I. SI $\mathcal{F}$ EST UNE FAMILLE RÉGULIÈRE, IL EXISTE DES POLYGONES DISTINCTS $\mathcal{F}$-ÉQUIVALENTS

Soit un entier $p \geqslant 3$. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Dans ce I, pour chaque k de $\{1, 2, \ldots, p\}$, on note A_k le point d'affixe ω^k, et B_k celui d'affixe $e^{i\frac{\pi}{p}}\omega^k$.

1. Montrer que chacun des systèmes $(A_1, \ldots, A_p)$ et $(B_1, \ldots, B_p)$ définit un polygone convexe. On pose $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A_1, \ldots, A_p)$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P}(B_1, \ldots, B_p)$.

2. Soit q fixé dans $\{1, 2, \ldots, p\}$. Prouver que la réflexion dont l'axe est la droite passant par 0 et de direction $\delta\left((2q-1)\frac{\pi}{2p}\right)$ transforme $\mathcal{P}'$ en $\mathcal{P}$.

3. En déduire p directions distinctes suivant lesquelles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont équivalents.

4. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et une famille régulière $\mathcal{F} = \{d_1, \ldots, d_m\}$. Démontrer qu'il existe au moins deux polygones convexes différents et $\mathcal{F}$-équivalents.

II. S'IL EXISTE UN $\mathcal{F}$- POLYGONE, ALORS $\mathcal{F}$ EST EXTRAITE D'UNE FAMILLE RÉGULIÈRE

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble non vide de directions. On suppose qu'il existe un $\mathcal{F}$-polygone convexe $\mathcal{P}(A_1, \ldots, A_p)$. On identifie les points $A_1, \ldots, A_p$ et leurs affixes respectives $a_1, \ldots, a_p$.

On suppose que $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 0$. Utilisant les notations du A.V., on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^p$ en posant $u_0 = h$ et $u_n = T^n u_0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On suppose qu'il existe un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\alpha_{p-1} = e^{i\theta}\alpha_1$. Pour tout indice q de $\{1, \ldots, p\}$ on pose :

$$\lambda_q = \sin\left((q-1)\frac{2\pi}{p} - \frac{\theta}{2}\right).$$

a. Démontrer que $\sum_{q=1}^{p} \lambda_q a_q = 0$ et que $\sum_{q=1}^{p} \lambda_q = 0$.

b. En déduire une contradiction avec la convexité de $\mathcal{P}$.
(On pourra utiliser l'ensemble :

$$I = \{q \in \{1, \ldots, p\},\ \lambda_q > 0\}.)$$

2. Montrer que l'application $f : z \longrightarrow \alpha_1 z + \alpha_{p-1}\bar{z}$ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace-vectoriel $\mathbb{R}^2$, et que le système $\alpha_1 H_1 + \alpha_{p-1} H_{p-1}$ de $\mathbb{C}^p$ définit un polygone convexe, qu'on notera $\mathcal{Q}$.

3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{\pi}{p}\right)^{-2np} u_{2np} = \alpha_1 H_1 + \alpha_{p-1} H_{p-1}$.

4. Soit δ une direction fixée dans $\mathcal{F}$.

a. En utilisant B.IV., établir que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, δ est la direction d'au moins une droite joignant deux sommets distincts du polygone $\mathcal{P}(u_{2np})$.

b. Montrer qu'on peut supposer que chacun de ces deux sommets a un indice indépendant de n.

c. En déduire que δ est la direction d'au moins une droite contenant deux sommets distincts du polygone $\mathcal{Q}$.

d. Montrer que le résultat subsiste si l'on ne suppose plus $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 0$.

5. En conclure que $\mathcal{F}$ est extraite d'une famille régulière de p directions.

III

On admet que s'il existe deux polygones distincts $\mathcal{F}$- équivalents, et si $\mathcal{F}$ comporte au moins deux directions, alors on peut construire un $\mathcal{F}$- polygone.

Conclure.